Einschub: Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen alle Gleichungen der Form

$$x^2 = a \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.

Gute Nachricht:
Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Beispiel: Für $a = -1$ gibt es *keine* reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Zur Lösung aller Gleichungen der Form $x^2 = a$ erweitern wir den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen. Diese `Körpererweiterung` führt uns zum `Körper der komplexen Zahlen`, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Dabei diskutieren wir die (algebraische und geometrische) Struktur von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

Start: Führe *symbolische Lösung* i für die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ein, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl i heißt imaginäre Einheit (eine Definition für i folgt später).

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit i bilden wir die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Schließlich: Führe die Addition $'+'$ und die Multiplikation $' \cdot '$ auf $\mathbb{C}$ ein.

Grundsätzliche Fragen:

- Was ist eigentlich i? Und ist i als Lösung von $i^2 + 1 = 0$ *eindeutig*?
- Wie führen wir die Addition $'+'$ und die Multiplikation $' \cdot '$ auf $\mathbb{C}$ ein?
- Kann man in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Verknüpfungen $'+'$ und $' \cdot '$ in $\mathbb{C}$ *konsistent* mit denen in $\mathbb{R}$?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?

Zur Einführung der komplexen Zahlen.

Definition: Eine komplexe Zahl ist ein geordnetes Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reeller Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Wir fassen alle komplexen Zahlen in der Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

zusammen. Die Addition $'+'$ in $\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C},$$

und die Multiplikation $' \cdot '$ in $\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}.$$

Damit besitzt $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ eine algebraische Struktur. ◯

Erste wichtige Beobachtung: Durch die Addition zweier komplexer Zahlen entsteht eine komplexe Zahl. Genauso entsteht durch die Multiplikation zweier komplexer Zahlen eine komplexe Zahl. Daher sind die Addition $'+'$ und die Multiplikation $' \cdot '$ jeweils in $\mathbb{C}$ abgeschlossen. □

Elementare Eigenschaften der komplexen Zahlen.

Wir halten direkte Beobachtungen zur algebraischen Struktur von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ fest.

Bemerkung 1: Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ sind jeweils kommutativ und assoziativ. Dies folgt aus den entsprechenden Eigenschaften in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. □

Bemerkung 2: Für $(0,0) \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung $(a,b) + (0,0) = (a,b)$ für alle $(a,b) \in \mathbb{C}$, d.h. $(0,0)$ ist das neutrale Element der Addition in $\mathbb{C}$. □

Bemerkung 3: Für $(1,0) \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung $(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$ für alle $(a,b) \in \mathbb{C}$, d.h. $(1,0)$ ist das neutrale Element der Multiplikation. □

Bemerkung 4: Für $(a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ besitzt die Gleichung $(a,b) \cdot (x,y) = (1,0)$ die eindeutige Lösung

$$(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \in \mathbb{C},$$

d.h. $(x,y) \in \mathbb{C}$ ist das multiplikative Inverse zu (a,b). □

Zur algebraischen Struktur der komplexen Zahlen.

Satz: *Die komplexen Zahlen* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *bilden einen Körper.*

Anleitung zum Beweis: Weise die Körperaxiome, genauso wie für den Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, nach:

(I) Die komplexen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine `Abelsche Gruppe`.

(II) Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ ist kommutativ und assoziativ. Weiterhin gibt es eine `Eins` in $\mathbb{C}$, nämlich das Element $(1, 0) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$, und schließlich besitzt jedes $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{C}$.

(III) In $\mathbb{C}$ gilt das `Distributivgesetz`. □

Bemerkung: Die Eigenschaften **(I)** und **(II)** hatten wir bereits diskutiert und das Distributivgesetz in **(III)** weist man durch einfaches Rechnen nach. □

Vereinbarung zur Notation: Ab sofort notieren wir kurz $\mathbb{C}$ statt $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. □

Zur Einbettung der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$.

Satz: *Die Abbildung* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, *definiert durch* $\varphi(a) := (a, 0)$, *für* $a \in \mathbb{R}$, *ist* injektiv, *d.h. aus* $a_1 \neq a_2$ *folgt* $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

Weiterhin gelten für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 a_2) &= (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \end{aligned}$$

Beweis: Einfach elementar nachrechnen. □

Fazit (drei gute Nachrichten):

- Können reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit komplexen Zahlen $(a, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren.
- Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ sind konsistent mit den Rechenregeln in $\mathbb{R}$.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen Teilkörper von $\mathbb{C}$. □

Die komplexen Zahlen sind nicht angeordnet.

Wir beginnen unsere Ausführung mit einer weiteren elementaren Beobachtung.

Bemerkung: Für $(0,1) \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. □

Definition: Das Element $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ heißt imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. ○

Zur Frage nach der Anordnung in $\mathbb{C}$ erinnern wir zunächst an die Gültigkeit der Anordnungsaxiome **(A1)-(A3)** in $\mathbb{R}$:

(A1): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;

(A2): Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;

(A3): Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Satz: *Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet.*

Beweis: Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so wäre jede Quadratzahl in $\mathbb{C}$ nicht-negativ. Damit folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < i^2 = -1$$

sofort der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$. ■

Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

Wir hatten bereits für $a \in \mathbb{R}$ die kürzere Notation a statt $(a, 0) \in \mathbb{C}$ eingeführt, und weiterhin setzten wir $i := (0, 1)$ für die imaginäre Einheit.

Damit lässt sich jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib.$$

Vereinbarung: Wir notieren ab sofort für $(a, b) \in \mathbb{C}$ alternativ $a + ib$. □

Bemerkung und Warnung: Mit dieser Vereinbarung können wir für die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$ die Gleichung $i^2 = -1$ notieren.

Allerdings ist die Notation $i = \sqrt{-1}$ *unsinnig*, denn daraus folgt

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1,$$

im Widerspruch zu den bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$. □

Fazit: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in $\mathbb{C}$ lösbar, nämlich mit $\pm i$. □

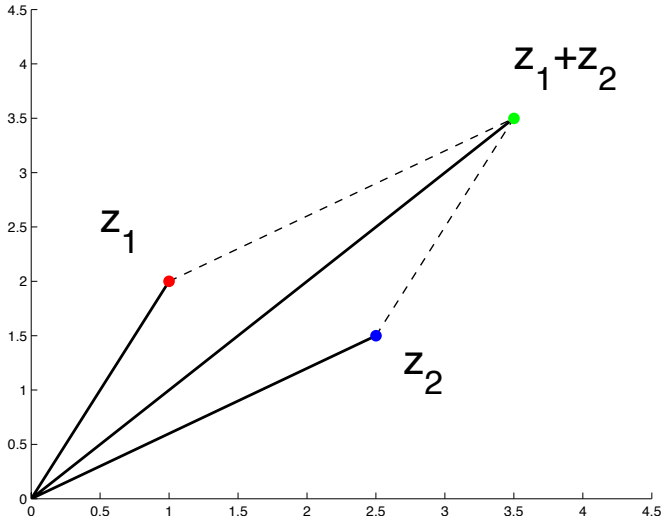
Zur Darstellung in der komplexen Zahlenebene.

Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als Punkt in der

komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit einer reellen Achse, $\mathbb{R}$, und einer imaginären Achse, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometrische Veranschaulichung der Addition:
Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



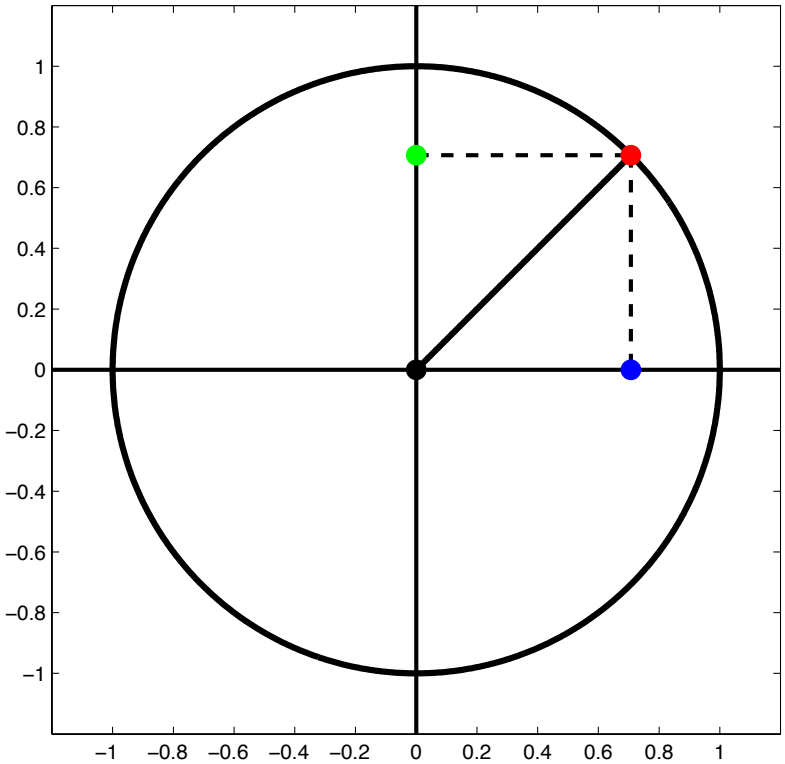
Addition zweier komplexer Zahlen.

Real- und Imaginärteile komplexer Zahlen.

Für eine komplexe Zahl

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z.



$z = x + iy$ mit Realteil $x = \mathrm{Re}(z)$ und Imaginärteil $y = \mathrm{Im}(z)$.

Rechenregeln für Realteil und Imaginärteil.

Für die Realteile und die Imaginärteile komplexer Zahlen

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad w = u + iv \in \mathbb{C} \qquad \text{für } x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z+w) &= \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\operatorname{Im}(z+w) &= \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\operatorname{Re}(az) &= a\operatorname{Re}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \\
\operatorname{Im}(az) &= a\operatorname{Im}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Schließlich erinnern wir an die Darstellung

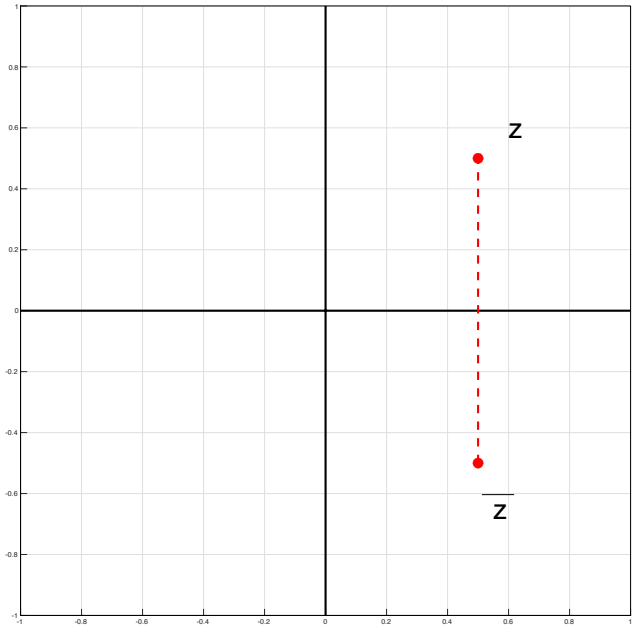
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{für } z \neq 0$$

für das multiplikative Inverse zu $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Die Konjugation komplexer Zahlen.

Definition: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist die zu z konjugiert komplexe Zahl definiert durch

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}.$$



Die Konjugation von $z = x + iy$ liefert die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - iy$.

Geometrisch gesagt: Die Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse.

Rechenregeln für die komplexe Konjugation.

Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad w = u + iv \in \mathbb{C}$$

und deren konjugiert komplexen

$$\overline{z} = x - iy \in \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad \overline{w} = u - iv \in \mathbb{C}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned}
\overline{w+z} &= \overline{w} + \overline{z} \\
\overline{wz} &= \overline{w} \cdot \overline{z} \\
\overline{(\overline{z})} &= z \\
z\overline{z} &= x^2 + y^2 \\
\operatorname{Re}(z) &= (z + \overline{z})/2 \\
\operatorname{Im}(z) &= (z - \overline{z})/(2i)
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$. □

Die Betragsfunktion.

Definition: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist der Betrag $|z|$ von z definiert durch

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Funktion $z \longmapsto |z|$ heißt Betragsfunktion. ◯

Bemerkung: Mit der Betragsfunktion messen wir mit $|w - z|$ den Abstand von $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene. Somit ist $|z| = |z - 0|$ der Abstand von $z \in \mathbb{C}$ zum Ursprung. Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein. Schließlich gelten die Abschätzungen

$$-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z| \qquad \text{und} \qquad -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z| \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

die man elementar nachrechnet. □

Bemerkung: Die Betragsfunktion ist eine Norm auf $\mathbb{C}$, d.h. es gilt:

- $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ (Definitheit),
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (Homogenität),
- $|w + z| \leq |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung). □

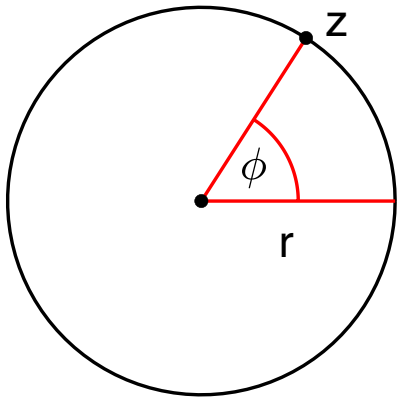
Von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten.

Satz: *Zu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 0$ gibt es genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit*

$$z = (r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = r(\cos(\phi), \sin(\phi)).$$

wobei wir $r := |z|$ setzen.

Beweis: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ gilt $x^2 + y^2 = r^2$. Unter Verwendung der trigonometrischen Funktionen $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ gilt $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$, wobei $\phi \in (-\pi, \pi]$ der Winkel (nach Bogenmaß) zwischen der reellen Achse und dem Strahl von Null durch z ist (siehe Skizze). ■



Fazit und Definition: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Darstellung

$$z = r(\cos(\phi), \sin(\phi)) \qquad \text{mit } r = |z|$$

in Polarkoordinaten $(r, \phi) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi]$ eindeutig. Für die Darstellung $z = x + iy$ bzw. $(x, y) \in \mathbb{C}$ verwenden wir den Begriff kartesische Koordinaten. ◯

Polarkoordinaten und die Eulersche[a] Formel.

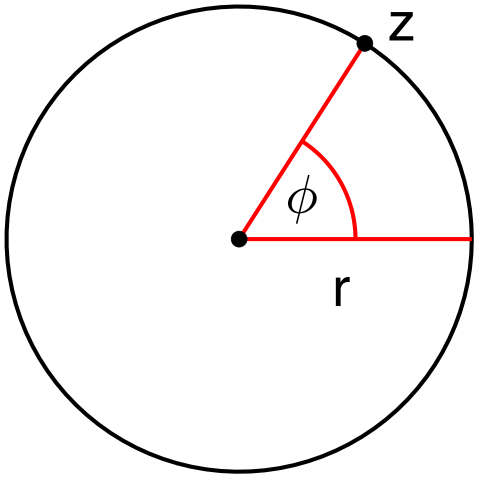
Zusammenfassung: Die Umrechnung $(x, y) \rightsquigarrow (r, \varphi)$ in Polarkoordinaten ist für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $r = |z| > 0$ beschrieben durch die Gleichung

$$(x, y) = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Definition: Der (eindeutige) Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heißt das Argument von z. ◯

Das Argument φ von $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi = \arg(z)$, lässt sich berechnen mit

$$\varphi = \arccos(x/|z|) = \arcsin(y/|z|).$$



Bemerkung: Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R},$$

und damit die kürzere Polarkoordinaten-Darstellung

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \qquad \text{mit } r = |z|.$$

[a] Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Ingenieur

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als Drehstreckung in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \qquad \text{und} \qquad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + i\sin(\psi))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + i\sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(i\psi) \cdot \exp(i\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(i(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(i(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + i\sin(\psi - \varphi)).$$

Die n-ten Einheitswurzeln.

Proposition: Für die n-te Potenz z^n, $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\phi))^n = |z|^n \exp(in\phi) = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Anwendung der Eulerschen Formel. ■

Folgerung: Die Gleichung $z^n = 1$ hat die n paarweise verschiedenen Lösungen

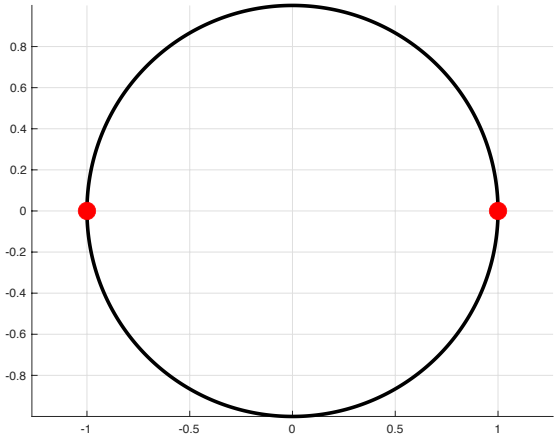
$$z_k = \exp(2\pi i k/n) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Beweis: Aus $z^n = 1$ folgt $|z| = 1$. Mit den n paarweise verschiedenen Winkeln $\phi_k = 2\pi k/n \in [0, 2\pi)$, $k = 0, \ldots, n-1$, ist die Gleichung $z^n = \exp(in\phi) = 1$ erfüllt. Weiterhin gilt $\exp(in\phi) = 1$ genau dann, wenn $n\phi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Dies folgt sofort aus der Eulerschen Formel. Damit sind mit $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1} \in [0, 2\pi)$ *alle* möglichen Argumente von z^n bestimmt (nach Umrechnung auf das Intervall $(-\pi, \pi]$). ■

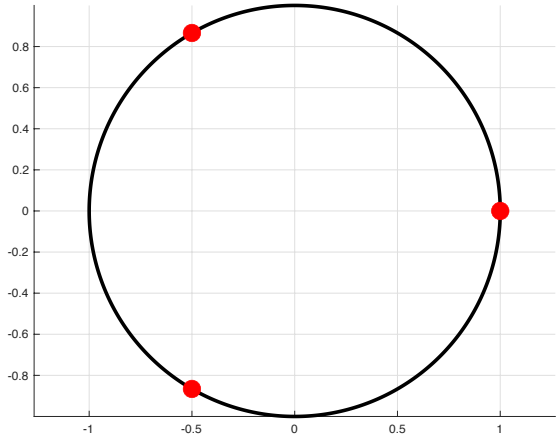
Definition: Die n Lösungen von $z^n = 1$ heißen n-te Einheitswurzeln. ◯

Beispiel: Mit $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$ ist $i = \exp(i\pi/2)$ eine 4-te Einheitswurzel. □

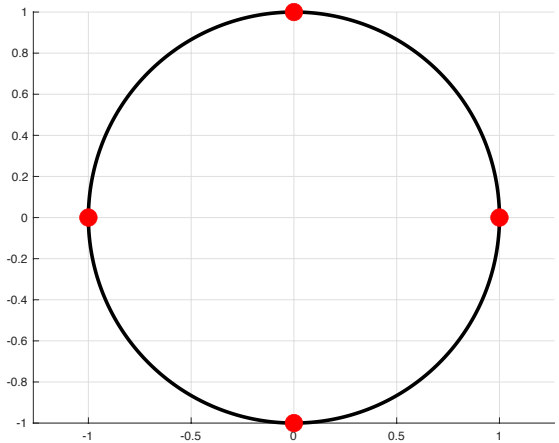
Die n-ten Einheitswurzeln für $n = 2, \ldots, 7$.



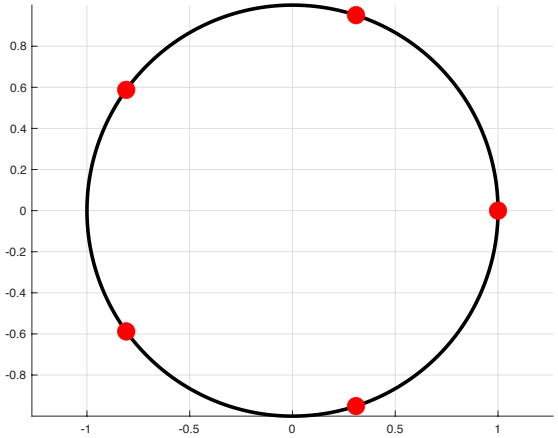
$n = 2$.



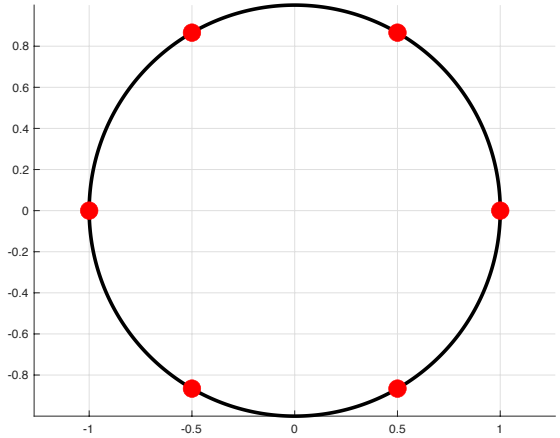
$n = 3$.



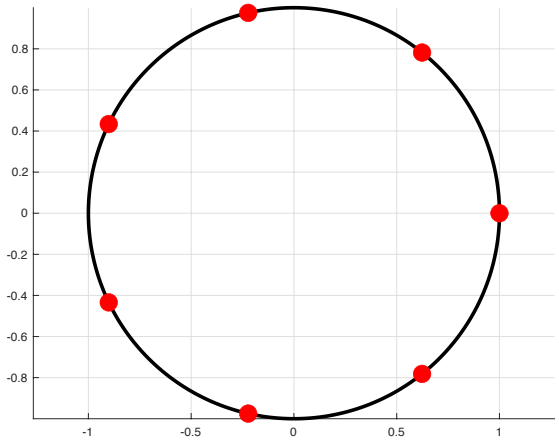
$n = 4$.



$n = 5$.



$n = 6$.



$n = 7$.